Лекция ПМТК 111124

Рассмотрим уравнение Матье, обобщенное включением слагаемого, отражающего присутствие в системе вязкого трения,

 (10.10)

Ограничимся обсуждением случая малой глубины модуляции и слабой диссипации ( ).

Возникает вопрос: как повлияет на границы области динамической неустойчивости присутствие слабого линейного демпфирования, присущего многим механическим и электромеханическим системам?

Для ответа на него воспользуемся неформальным приближенным методом, предложенным академиком А.Ю.Ишлинским.

При исследовании сложных механических и электромеханических систем А.Ю.Ишлинский рекомендует воспользоваться тем обстоятельством, что при потере устойчивости в них возникают расходящиеся колебания близкие к гармоническим. Поэтому можно сопоставить данную систему, находящуюся на пороге устойчивости, с некоторой воображаемой системой с одной степенью свободы, которая описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Они подбираются так, чтобы движение воображаемой системы по своему характеру было близким к движению исходной системы.

Предположим, что на границе устойчивости закон изменения решения z(t) уравнения (10.10) близок к гармоническому

 (10.16)

периода  (удвоенного периода рассматриваемых модуляционных колебаний) с неизвестной фазой .

Представляя уравнение (10.10) в виде

, (10.17)

имеем

 (10.18)

Делая обратную замену x на z, получаем

 (10.19)

Таким образом, имеем дифференциальное уравнение  (10.20

Условием возбуждения расходящихся колебаний, которые описываются уравнением (10.20), является неравенство

 (10.21)

На границе устойчивости имеем

 (10.22)

Вместе с тем период этих колебаний, как и период движения (10.16), должен равняться удвоенному периоду модуляционных колебаний. Следовательно,

 (10.23)

Исключая из равенств (10.22), (10.23) фазу , получим уравнение границы области динамической неустойчивости (неустойчивости по Ляпунову) в виде

 (10.24)

## 





Изображение границ зон параметрического резонанса на плоскости параметров  носит название “диаграммы Айнса-Стретта”.

Вводя (как это часто делают) параметры вида



представим уравнение Матье в виде



Ограничиваясь вторым порядком, найдем при малых b уравнения кривых, ограничивающих две области параметрического резонанса

 и построим диаграмму Айнса - Стретта.

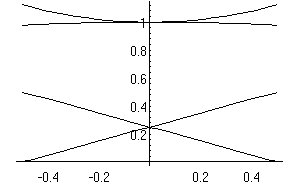


Рис.

Глобальная диаграмма Айнса - Стретта, рассчитанная для любых значений параметров b и с, имеет характерный вид серпообразных областей устойчивости, перемежающихся языками зон параметрического резонанса, которые вырастая из точек  на плоскости  или точек  на плоскости b,c.

## *Задача акад.П.Л.Капицы о динамической устойчивости перевернутого маятника. Описание проведенного им эксперимента.*

Любопытный эффект проявляется, если разрешить параметру c принимать отрицательные значения. Это соответствует движению маятника около его верхнего положения равновесия. Ясно, что при отсутствии модуляции равновесие перевернутого маятника неустойчиво. Но при наличии модуляции возникает зона устойчивости и при отрицательных значениях параметра c. При достаточно большой величине параметра b и достаточно малой величине параметра c оказывается возможной стабилизация перевернутого положения маятника. Достаточно большую величину параметра b можно обеспечить определенным уровнем глубины модуляции - амплитуды вибрации основания маятника, а достаточно малую величину параметра c - высокой частотой вибрации основания.

Ограничиваясь вторым порядком определителей Хилла, найдем при малых b уравнения кривых, ограничивающих соответствующую область устойчивости и построим диаграмму Айнса - Стретта



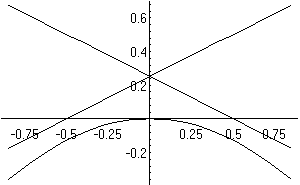


Рис.

Приведем известное описание эффекта стабилизации перевернутого положения маятника с помощью вертикальной вибрации основания, данное академиком П.Л.Капицей.

“Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто бы для него существует особая сила, направленная по оси колебаний подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размытым, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться как обычный маятник.”

***Основная область параметрической неустойчивости в трехмерном пространстве параметров:* коэффициент затухания, глубина модуляции, частота колебаний*. Эффект роста глубины модуляции, необходимой для возникновения динамической неустойчивости, с ростом номера зоны параметрического резонанса.***

Ранее получено уравнение, задающее в пространстве параметров  границу основной области динамической неустойчивости, возникающей в окрестности точки .

Учитывая, что , не теряя точности, имеем

 (11.1)

Таким образом, уравнение границы области неустойчивости в пространстве  приобретает вид

 (11.2)

При фиксированной глубине модуляции  соответствующие сечения границы области неустойчивости в плоскости параметров представляют собой эллипсы

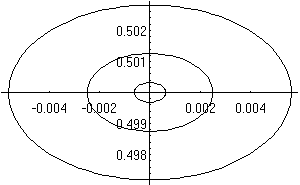


Рис.11.2

При фиксированном коэффициенте затухания  соответствующие сечения границы области неустойчивости в плоскости параметров  представляют собой гиперболы, симметричные относительно оси . (На рисунке (11.3) представлена только одна ветвь гиперболы).

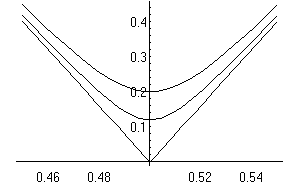


Рис.11.3

Итак, и при наличии диссипативных сил основная область динамической неустойчивости системы сохранилась. Правда, с ростом коэффициента диссипации  возрастает порог срабатывания “модуляционной накачки”. Если глубина модуляции недостаточно велика, при  параметрический резонанс не возникает ни при каких значениях .

Области динамической неустойчивости с ростом их “номера”  резко и монотонно сужаются. На рис.11.4 представлены проекции (тени) двух первых зон на плоскость .

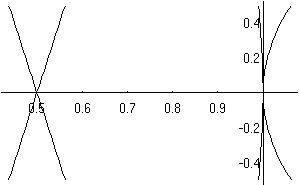


Рис.11.4

Поэтому с ростом номера зоны монотонно растет расстояние от сечения поверхностей этих областей плоскостями  до плоскости . Иначе говоря, имеет место эффект роста глубины модуляции, необходимой для возникновения динамической неустойчивости, с ростом номера зоны параметрического резонанса.

***Представление задачи Матье в форме “системы с быстрой фазой”.***

***Простейшая порождающая система. Амплитуды и фазы. Нелинейная замена переменых.***

***Одномерный тор. Расширенное фазовое пространство. Двумерный тор, порождаемый фазой колебаний и временем как базовая конструкция, содержащая решения порождающей системы в расширеном фазовом пространстве.***

***Рациональные и иррациональные частоты колебаний. Соответствующие "обмотки" двумерного тора: замкнутые кривые и кривые, всюду плотно и равномерно заметающие тор.***

Области неустойчивости по Ляпунову решений уравнения Матье называют зонами параметрического резонанса. **Теория мультипликаторов позволила нам установить, что неустойчивость связана с тем, что собственная частота колебаний системы при отсутствии модуляции по крайней мере приблизительно связана с частотой модуляционной накачки**, которая в наших лекциях принималась равной единице, соотношением

 (11.3)

Таким образом, неустойчивую систему Матье, видимо, полезно рассматривать как двухчастотную систему со специально подобранными “резонансными” параметрами. Сотношение (11.3) можно включить в более широкое соотношение рациональной связи

, (11.4)

где k и n взаимно простые натуральные числа, и рассмотреть вопрос, чем выделяются системы с рационально связанными частотами. **Не заключается ли уже в рациональной связи частот одна из причин, вызвавших явление параметрического резонанса?**

Положим в системе (37.17) глубину модуляции  равной нулю. Полученную систему

 (11.5)

называют порождающей.

Решения системы (11.5) на фазовой плоскости  представляют собой эллипсы

 (11.6)

В системе (11.5) проведем нелинейную замену переменных, перейдя в полярную систему координат и изменив масштабы переменных так, чтобы эллипсы на фазовой плоскости превратились в окружности

 (11.7)

В новых переменных система (11.5) примет вид

 (11.8)

Применяя замену того же типа к системе Матье, получим

 (11.9)

Система (11.9) нелинейная и нестационарная (неавтономная) система уравнений. Удобно сделать ее автономной, добавив очевидное уравнение для переменной t

 (11.10)

Тогда при  система (11.9), (11.10) переходит в систему

 (11.11)

и переменная t не уходит из нашего поля зрения.

Пространство переменных  носит название расширенное фазовое пространство системы.

В простейшем случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью мы считаем, что угловая переменная (фаза)  со временем монотонно растет, наподобие времени, несмотря на то, что фактически она меняется в пределах  и это изменение все время повторяется.

С целью изучения поведений решений системы Матье, наоборот, удобно переменную t рассматривать как еще одну фазу, считая, что , где , а k - число пройденных полных оборотов.

Тогда система уравнений (11.9), (11.10) запишется в виде двухчастотной системы

 (11.12)

а ее порождающая система (11.11) примет вид

 (11.13)

Пространство переменных  также будем называть расширенным фазовым пространством.

Решения системы (11.13) в расширенном фазовом пространстве представляют собой кривые, параметрически заданные уравнениями

 (11.14)

и расположенные на геометрических объектах, называемых торами.

В современной математике геометрические объекты, которые задаются n угловыми координатами

 (11.15)

называют n-мерными торами. Поэтому решения системы (11.14) расположены на двумерных торах (рис.11.5), а решения системы (11.8) представляют собой одномерные торы.

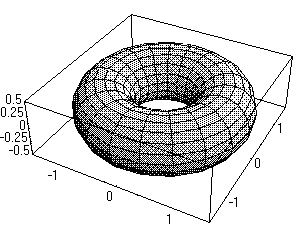


Рис.11.5

Рассмотрим соотношение между частотами - угловыми скоростями, с которыми изменяются решения  и  системы (11.13). Вообще говоря, отношение , те есть безразмерная частота , может быть как рациональным, так и иррациональным числом.

В первом случае решение системы (11.13) будет представлять собой замкнутую кривую. Действительно. Поскольку  то через промежуток времени, равный  изображающая точка, сделав ровно n оборотов по углу  и k оборотов по углу , попадет в ту же точку на торе, из которой она начинала движение. Во втором случае кривая решения никогда не сможет в точности вернуться в начальную точку на торе. Ей не даст это сделать несоизмеримость дуг, пройденных изображающей точкой по по углу  по углу . Кривая решения будет постепенно обматывать тор, всюду плотно заполняя его поверхность. Можно показать, что при этом суммарное время пребывания изображающей точки в различных областях поверхности тора пропорционально доли их площади в площади всей поверхности тора.

***Пространственое и временное среднее. Теорема об усреднении.***

Итак, в случае рационально связанных частот, несмотря на нахождение изображающей точки на поверхности двумерного тора, ее траектория представляет собой одномерный тор, а в случае иррационально связанных частот именно двумерный тор и описывает то геометрическое место, где находится изображающая точка.

Пусть f() некоторая интегрируемая функция, заданная на двумерном торе.

Пространственным средним от функции f() на двумерном торе называется число Mf, которое вычисляется по следующему правилу

 (12.1)

Рассмотрим теперь значения функции f() на решениях системы (11.13) . Это - функция времени f().

Временным средним функции f() на двумерном торе (если оно существует) называется функция , которая находится по следующему правилу

 (12.2)

Имеет место следующая теорема. Временное среднее существует и совпадает с пространственным, если функция f интегрируема, а частоты  и  рационально не связаны (является иррациональным числом).

 (12.3)

Эта теорема называется теоремой об усреднении или эргодической теоремой Г.Вейля.

Для эргодических систем [математическое ожидание](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) по [временной переменной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%80%D1%8F%D0%B4) должно совпадать с математическим ожиданием по пространственным переменным. То есть для определения параметров системы можно долго наблюдать за поведением одного её элемента, а можно за очень короткое время рассмотреть все её элементы (или достаточно много элементов). Если система обладает свойством эргодичности, то в обоих случаях получатся одинаковые результаты.

Если частоты  и  рационально связаны (является рациональным числом), то кривая решения замкнута на двумерном торе и не заметает весь тор, поэтому интеграл вдоль решения и интеграл по всей поверхности тора могут не совпадать. При этом временное среднее, рассматриваемое как функция , может иметь точки разрыва.

***Медленные и быстрые переменные. Уменьшение размерности торов в зонах параметрического резонанса с помощью замены переменных - введения резонансной (временной) расстройки. Одночастотные колебания в расширенном фазовом пространстве. Критерий устойчивости решения как условие неразрушаемости порождающих торов и близости (неразбегания) фаз.***

Рациональная связь между частотами приводит к изменению числа медленных переменных в рассматриваемой системе.

Действительно. Пусть выполнено условие (11.4). Сделаем замену угловых переменных в системе (11.13) по формуле

 (12.4)

Тогда

 (12.5)

Таким образом, новая переменная , называемая фазовой или резонансной расстройкой в системе (11.13), просто не меняется, и сама система принимает вид

 (12.6)

Введение фазовой расстройки  обеспечивает переход двухчастотной системы (11.13) с одной “медленной переменной”  и двумя “быстрыми”  на двумерном торе в одночастотную систему (12.6) с двумя “медленными переменными”  и одной “быстрой”  на одномерном торе.

Рассмотрим систему уравнений Матье (11.12). При малых  она является “возмущением” порождающей системы (11.13). Ее устойчивость при малой глубине модуляции можно неформально интерпретировать как сохранение близости решений (11.12) к решениям системы (11.13). Во всяком случае, при малых , тор, на котором находятся решения, должен деформироваться слабо. Это означает, что содержащие малый множитель  слагаемые в правых частях системы (11.12) не должны иметь постоянной составляющей.

Если частота  иррациональна, то по теореме об усреднении временное среднее вдоль решения порождающей системы от содержащих малый множитель  слагаемых в правых частях системы (11.12) равно пространственному среднему, которое равно нулю.

 (12.7)

 (12.8)

Если же частота  рациональна и выполнено соотношение (11.4), то прежде всего сделаем замену переменных, введя фазовую расстройку (12.4).

В этом случае получим систему вида

 (12.7)

с двумя медленными переменными  и одной быстрой  на одномерном торе и с порождающей системой (12.6).

Взяв, считая  постоянным, одномерное пространственное среднее по  от содержащих малый параметр  слагаемых правых частей уравнений (12.7), получим

 (12.8)

 (12.9)

Следовательно, при n/k = 2 постоянная составляющая скорости равна нулю, а угловых скоростей  и () равна 0,125 и не равна нулю. Решение системы (12.7) будет систематически уходить от решения порождающей системы (12.6). Но это и есть динамическая неустойчивость. Таким образом, выявляется одно из значений безразмерной собственной частоты системы Матье, при которых возникает параметрический резонанс: .